Mecánica Teórica

Prof. Javier Garcia

4 de agosto de 2019

Problemas propuestos del Capítulo 15 - Mecánica Teórica [TEOREMA DE NOETHER parte 2]

Considere el siguiente funcional

$$\mathcal{S}\left[x(t)\right] = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2(t)}{c^2}}\ dt$$

a) Demostrar que el funcional es invariante ante la transformación

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma\left(ct - \beta x\right) \\ x' &= \gamma\left(-\beta ct + x\right) \end{aligned}$$

en donde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ y $\beta = \frac{v}{c}$.

b) Encontrar las transformaciones infinitesimales

Solución

a) Invarianza de las Transformaciones

Primero tenemos que invertir las transformaciones para obtener (ct, x) en términos de (ct', x') y luego poder calcular diréctamente, la acción en términos de (ct', x'):

$$
\begin{aligned}
ct' &= \gamma\,(ct - \beta x)\\
x' &= \gamma\,(-\beta ct + x)
\end{aligned}
$$

que en forma matricial seria

$$
\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}
$$

Osea que las transformaciones inversas son,

$$
\begin{aligned}
c\,t &= \gamma\,(c\,t' + \beta\,x')\\
x &= \gamma\,(\beta\,c\,t' + x')
\end{aligned}
$$

Hay que recordar que tanto t y x son funciones de dos variables ($t(t', x')$ y $x(t', x')$). Además, estas transformaciones son lineales en t' y x'. Por tanto, con la *Regla de la Cadena* podemos obtener los diferenciales,

$$
\begin{aligned}
c\,dt &= \gamma\,(c\,dt' + \beta\,dx')\\
dx &= \gamma\,(\beta\,c\,dt' + dx')
\end{aligned}
$$

Dividiendo la segunda ecuación entre la primera, obtenemos la expresión en $\dot{x}$ que necesitamos para substituir en el funcional. Según los físicos, los diferenciales se pueden tratar como cantidades algebraicas, asi que, sin ningún temor,

$$
\frac{\dot{x}}{c} = \frac{dx}{c\,dt} = \frac{\gamma\,(\beta c\,dt' + dx')}{\gamma\,(c\,dt' + \beta dx')} = \frac{(\beta c\,dt' + dx')}{(c\,dt' + \beta\,dx')}
$$

Podemos insertar esto en el funcional y simplificar. Solo es necesario mostrar la invarianza para el integrando, asi que,

$$
\sqrt{1 - \left(\frac{\dot{x}}{c}\right)^2}\,dt = \sqrt{1 - \left(\frac{dx}{c\,dt}\right)^2}\,dt = \sqrt{\frac{(c\,dt)^2 - (dx)^2}{(c\,dt)^2}}\,dt = \sqrt{\frac{(c\,dt' + \beta\,dx')^2 - (\beta\,c\,dt' + dx')^2}{(c\,dt' + \beta\,dx')^2}}\,dt
$$

Luego de expandir los cuadrados en el numerador, los términos cruzados se cancelan, y el denominador dentro del radical cancela el dt que esta fuera del radical, dejando un c guindando. Entonces,

$$\sqrt{\frac{\gamma^2 c^2 (dt')^2(1-\beta^2) - \gamma^2 (dx')^2 (1-\beta^2)}{(c\,dt' + \beta\,dx')^2}}\,dt = \sqrt{c^2\;(dt')^2 - (dx')^2}\frac{1}{c} = \sqrt{c^2\;(dt')^2 - (dx')^2}\frac{dt'}{c\,dt'}$$

Metiendo el $c\,dt'$ dentro del radical y simplificando se obtiene finalmente

$$\sqrt{1-\left(\frac{\dot{x}'}{c}\right)^2}\,dt'$$

.

b) Las Transformaciones Infinitesimales

Estas transformaciones infinitesimales, se refieren a la representación de las transformaciones usadas en la parte a) de estos ejercicios [1]. La idea es tener una representación de una transformación arbitrariamente cercana a la identidad, y que sea parte de un grupo. De ahí el apodo transformación de simetría. El concepto de grupo codifica la simetría de un sistema, en este caso, indexando continuamente los x-Boost. Aqui la simetría es la forma del integrando. Si el integrando (osea, el Lagrangiano) vuelve a tener la misma forma algebraica despues de aplicarle una transformación, eso equivale a la *propiedad de clausura*, que es parte esencial de un grupo. Si además, dentro de la familia existe una transformacion *identidad*, una *inversa* para cada transformación y la *propiedad asociativa*, esto seria suficiente para definir un grupo.

Entonces, buscamos una representación de la matriz $\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}$ que sea de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si aproximamos a primer orden en β la matriz del x-Boost, queda precísamente esta última expresión, ya que la constante $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ que a primer orden es 1,

$$1 + \frac{\beta^2}{2} + O\left(\beta^4\right)$$

Por tanto, una transformación infinitesimal del x-Boost seria, a primer orden en el parámetro β,

$$\begin{aligned} ct' &= ct - \beta x \\ x' &= -\beta ct + x \end{aligned}$$

[1] Estas son conocidas en la literatura como x-Boost de Lorentz